

## Důkazy

Doporučenou metodu důkazu není nutno dodržet

- 1) Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla  $x, y$  platí nerovnost  
$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

( návod: přímý důkaz algebraickou úpravou )
- 2) Dokažte, že pro každá čtyři reálná čísla  $x, y, u, v$  platí nerovnost  
$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \geq (xu + yv)^2$$

( návod: přímý důkaz algebraickou úpravou )
- 3) Dokažte, že  $\forall a, b \in Q^+$  platí:  $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in Q \Rightarrow \sqrt{a} \in Q \wedge \sqrt{b} \in Q$ .  
( návod: přímý důkaz, nadefinujte závorku jako rac. číslo, osamostatněte  $a$ ; z tohoto vztahu vyjádřete  $\sqrt{b} \dots$  )
- 4) Dokažte Thaletovu větu.  
( návod: přímý důkaz, obrázek, vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku )
- 5) Dokažte Pythagorovu větu.  
( návod: přímý důkaz, obrázek )
- 6) Dokažte, že funkce  $y = \frac{3x+1}{2}$  je rostoucí.  
( návod: přímý důkaz z definice rostoucí funkce )
- 7) Dokažte, že funkce  $y = \frac{4-2x}{3}$  je klesající.  
( návod: přímý důkaz z definice rostoucí funkce )
- 8) Dokažte: jestliže nelze kružítkem sestrojít úhel o velikosti  $1^\circ$ , pak nelze sestrojít ani úhel o velikosti  $19^\circ$ .  
( návod: nepřímý důkaz, vychází z možnosti sestrojovat násobky daného úhlu )
- 9) Je dána kružnice  $k$  se středem  $S$  a v jejím bodě  $A$  přímka  $p$ , která je kolmá na přímkou  $SA$ . Dokažte, že přímka  $p$  má s kružnicí jen jediný společný bod.  
( návod: sporem užitím vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku )
- 10) Dokažte, že číslo  $\sqrt{7}$  je iracionální. ( návod: sporem )
- 11) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel. ( návod: sporem )
- 12) Dokažte, že  $\forall x \in R$  je  $\sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}$   
( návod: sporem řešením goniometrické rovnice )
- 13) Dokažte, že  $\forall n \in N : 5^{n+1} + 6^{2n-1}$  je dělitelné číslem 31.  
( návod: matematickou indukcí )
- 14) Dokažte, že  $\forall n \in N : 4 \mid (2n^2 + 2n)$   
( návod: matematickou indukcí )
- 15) Dokažte, že  $\forall n \in N : 6 \mid (n^3 + 5n)$   
( návod: matematickou indukcí )
- 16) Dokažte, že  $\forall n \in n : 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$   
( návod: matematickou indukcí )
- 17) Dokažte, že  $\forall n \in n : 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$   
( návod: matematickou indukcí )
- 18) Dokažte, že  $\forall n \in n : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$   
( návod: matematickou indukcí )
- 19) Dokažte, že  $\forall n \in N : 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$   
( návod: matematickou indukcí )
- 20) Dokažte, že  $\forall n \in N, n \geq 3 : 2^n > 2n + 1$   
( návod: matematickou indukcí )
- 21) Dokažte, že  $\forall n \in N : n < 2^n$   
( návod: matematickou indukcí )
- 22) Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.  
( návod: matematickou indukcí )